Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800€ respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por Kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0.9 PUNTO] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular el precio (en €/kg) de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.

B. [0.8 PUNTOS) Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0.8 PUNTOS] Resuélvalo.

A. x: Precio del kg de tierra
y: Precio del kg de piedras decorativas
z: precio del kg de semillas

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 300x + 200y + 100z = 13000 \\ 300 \cdot \dfrac{x}{3} + 200 \cdot \dfrac{y}{2} + 100 \cdot \dfrac{z}{5} = 4200 \\ z = 2(y + x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 1z = 130 \\ 5x + 5y + z = 210 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

B. Analizamos la compatibilidad de dicho sistema

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 5 & 5 & 3 & 210 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como máximo el rango de ambas matrices será 3 ya que las dimensiones de la matriz de los coeficientes (A) es 3x3 y las dimensiones de la matriz Ampliada (A^*) es de 3x4.

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes (A):

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -15 + 10 + 4 - 10 + 10 - 6 = -7 \neq 0$$ → Como $|A| \neq 0$ → rg(A) = 3

Como máximo el rango de la matriz ampliada va a ser 3, por lo tanto:

Como rg(A) = rg(A^*) = número de incógnitas =3 → Tendremos un Sistema Compatible Determinado (S.C.D)

El sistema tendrá una única solución

C. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 5 & 5 & 1 & 210 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \to 3F_3 - 2F_1]{F_2 \to 3F_2 - 5F_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 2 & -5 & -260 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to 5F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 130 \\ 0 & 5 & -2 & -20 \\ 0 & 0 & -21 & -1260 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 60 \end{cases}$$

El precio del kg de tierra es de 10€/kg.

El precio del kg de piedras decorativas es de 20€/kg.

El precio del kg de semillas es de 60€/kg

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

A. Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de guías prácticas sobre sostenibilidad

y → numero de colecciones de libros de cocina vegetariana

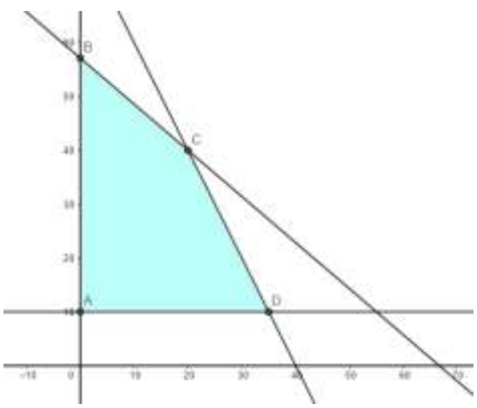
	Cantidad	**Papel Reciclado Alta calidad**	**Papel de Fibras de Bambú**
Guías prácticas sobre sostenibilidad	**x**	**60x**	**20x**
Colección de libros de cocina vegetariana	**y**	**70y**	**10y**
	x+y	60x+70y	20x+10y

El objetivo es maximizar los beneficios B(x,y) = 5x + 4y

Restricciones:

$$\begin{cases} 60x+70y \leq 4000 \\ 20x+10y \leq 800 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6x+7y \leq 400 \\ 2x+y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

B)



Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), los ingresos máximos, se consiguen en alguno de los vértices anteriores. Los valores de estos Ingresos en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x=0 \\ y=10 \end{cases}$ → A(0,10) → B_A= 5·0 + 4·10 = 40€

B$\begin{cases} x=0 \\ 6x+7y=400 \end{cases}$ → $B(0,400/7)$ → B_B= 5·0 + 4·400/7 = 228,57€

C$\begin{cases} 6x+7y=400 \\ 2x+y=80 \end{cases}$ → $\begin{cases} x=20 \\ y=40 \end{cases}$ → $C(20{,}40)$ → B_C= 5·20 + 4·40 = 260€

D$\begin{cases} y=10 \\ 2x+y=80 \end{cases}$ → $\begin{cases} x=35 \\ y=10 \end{cases}$ → D(35,10) → B_D= 5·35 +4· 10= 215€

Para obtener los máximos Beneficios se deben publicar 20 guías prácticas sobre sostenibilidad y 40 libros de cocina vegetariana, siendo el beneficio de 260€.

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS] . Dada la función f(x) = $\begin{cases} ax+2 & si\ x \le -1 \\ x^2-3x+5 & si -1 < x \le 3 \\ \frac{x-b}{x^2+1} & x > 3 \end{cases}$

a) [1,5 puntos] Determina los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

b) [1 punto] Calcule la integral definida I = $\int_0^2 f(x)dx$

a) **Estudio de la continuidad en x = -1**

- $\lim_{x\to -1^-} ax+2 = -a+2$
- $\lim_{x\to -1^+} x^2-3x+5 = 1+3+5 = 9$
- f(-1)= -a+2

Para que la función sea continua en x= -1, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto $-a+2 = 9 \to a = -7$

Estudio de la continuidad en x = 3

- $\lim_{x\to 3^-} x^2-3x+5 = 3^2-3\cdot 3+5 = 5$
- $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-b}{x^2+1} = \frac{3-b}{3^2+1} = \frac{3-b}{10}$
- f(3)= 5

Para que la función sea continua en x= 3, se tiene que cumplir que: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$

Por lo tanto $\frac{3-b}{10} = 5 \to 3-b = 50 \ \to b = -47$

b) Observamos que la función que está definida entre [0,2] es la función f(x) = x^2-3x+5

$$I = \int_0^2 (x^2-3x+5)dx = 60 \to \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x\right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{3\cdot 2^2}{2} + 5\cdot 2\right] - \left[\frac{0^3}{3} - \frac{3\cdot 0^2}{2} + 5\cdot 0\right] =$$

$$= \left[\frac{8}{3} - \frac{12}{2} + 10\right] - [0] = \left[\frac{20}{3}\right] - [0] = \frac{20}{3}$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función f(x) = $\frac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS) Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY

B.(1 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función

C.(1,25 PUNTOS) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento

A. Calculamos el dominio de la función:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R} - \{,2\}$

- **Calculamos los puntos de corte con los ejes:**
  - Con el eje X : f(x) = 0 → $\frac{2x^2+4x+2}{x-2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 4x + 2 = 0 \rightarrow$ x= -1 (-1,0)
  - Con el eje Y: x=0 → f(0) = -1 $(0,-1)$

B. Calculamos las asíntotas:

Asíntota Vertical

- Para x= 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4x+2}{x-2} = \frac{18}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{o}\right]$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2x^2+4x+2}{x-2} = \frac{+}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2x^2+4x+2}{x-2} = \frac{+}{0^+} = +\infty \rightarrow$$

Tenemos una **Asíntota Vertical en x = 2**

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tendremos una Oblicua

Asíntota Oblicua

y = mx+n

m = $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+4x+2}{x-2}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x} = 2$

Asíntota oblicua: y= 2x+8

n = $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}$ -2x = $\left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2-2x^2+4x}{x-2} = \quad \lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{x-2} = 8$

C. Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

$$f'(x) = \frac{(4x+4)\cdot(x-2)-(1)(2x^2+4x+2)}{(x-2)^2} = \frac{4x^2+4x-8x-8-2x^2-4x-2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 2x^2-8x-10=0 \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x=-1} \\ \boldsymbol{x=5} \end{cases} \rightarrow \text{Posibles Máximos o Mínimos}$$

	$(-\infty,-1)$	(-1,2)	(2,5)	$(5,\infty)$
Signo de f´(x)	+	-	-	+
Comportamiento de f(x)	↗	↘	↘	↗

- Crecimiento: $(-\infty,-1) \cup (5, \infty)$
- Decrecimiento: $(-1, 2) \cup (2,5)$
- Mínimo en x=5: (5,24)
- Máximo en x= -1: (-1,0)

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

a) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 100 estudiantes
$\bar{x} = 90$ min
$\sigma = 10$ min

Para una confianza del 93%, Nivel de confianza = 1- α = 0,93 → α = 0,07

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,965 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,035}$= 1,81

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,93}(\mu) = \left(90 - 1{,}81\frac{10}{\sqrt{100}};\ 90 + 1{,}81\frac{10}{\sqrt{100}}\right) = (88{,}19; 91{,}81)$$

b) Para una confianza del 97%, Nivel de confianza = 1- α = 0,97 → α = 0,03

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,985 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,015}$= 2,17

E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 2 \rightarrow n > \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma}{E}\right)^2 \rightarrow n > \left(\frac{2{,}17\cdot 10}{2}\right)^2 \rightarrow n > 117{,}72$

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **118 estudiantes**

Ejercicio 6 **[2,5 PUNTOS]**

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60% de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

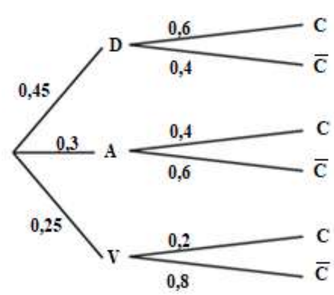
D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Se designan por:

D = "Practican deporte " A = " Participan en actividades artísticas " V = "Participan en actividades de voluntariado "

C = "Miembros del consejo estudiantil" $\bar{C}$ = "No son miembros del consejo estudiantil"

Diagrama de árbol



a) Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(D \cap < C)$ = P(D)·P(C/D)= 0,45· 0,6= 0,27 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 27%

b) Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(A \cap \bar{C})$ = P(A)·P($\bar{C}$ /A)= 0,3· 0,6= 0,18 → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 18%

c) Se trata de una probabilidad total:

P(C) = P(D)·P(C/D)+ P(A)·P(C/A)+ P(V)·P(C/V) = 0,45·0,6 + 0,3·0,4 + 0,25·0,2 = 0,44

$P(\bar{C})\ 1 - P(D) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$

d) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(V/\bar{C}) = \frac{P(V \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}8}{0{,}56} = 0{,}3571$ → Si nos pregustasen el porcentaje sería del 35,71%