Ejercicio 1 [2,5 puntos]

Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

A. x: Número de operarios
y: Número de supervisores
z: Número de gerentes

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=244} \\ \boldsymbol{x=8z} \\ \boldsymbol{x=4\left(\frac{y}{2}+\frac{40}{100}z\right)} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x+y+z=244} \\ \boldsymbol{x-8z=0} \\ \boldsymbol{5x-10y-8z=0} \end{cases}$$

B. Resolvemos el sistema de Ecuaciones

Vamos a resolverlo por el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 1 & 0 & -8 & 0 \\ 5 & -10 & -8 & 0 \end{pmatrix} \underset{F_3 \rightarrow F_3 - 5F_1}{\overset{F_2 \rightarrow F_2 - F_1}{--\rightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & -15 & -13 & -1220 \end{pmatrix} \overset{F_3 \rightarrow -15F_2 + F_3}{--\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 244 \\ 0 & -1 & -9 & -244 \\ 0 & 0 & 122 & 2440 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 160 \\ y = 64 \\ z = 20 \end{cases}$$

El número de operarios en la empresa es de 160

El número de supervisores en la empresa es de 64

El número de gerentes en la empresa es de 20

Ejercicio 2 [2,5 puntos]

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

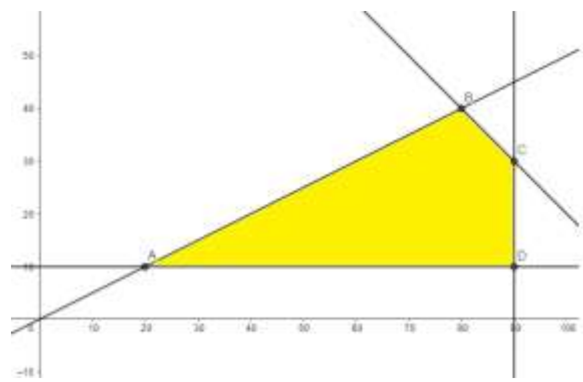
A. Se trata de un problema de programación lineal.

Las variables de decisión son: x → número de utilitarios

y → número de deportivos

El objetivo es maximizar la producción B(x,y) = 25.000x + 40.000y

Restricciones: $\begin{cases} x+y \le 120 \\ x \le 90 \\ y \ge 10 \\ x \ge 2y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+y \le 120 \\ x \le 90 \\ y \ge 10 \\ x-2y \ge 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$



C y D. Como se trata de una región factible cerrada (solución óptima), el máximo beneficio, se consigue en alguno de los vértices anteriores. Los valores de los beneficios en cada uno de esos vértices son:

A $\begin{cases} x = 2y \\ y = 10 \end{cases}$ → A(20,10) → B_A= 25000·20 + 40000·10 = 900.000 €

B$\begin{cases} x + y = 120 \\ x = 2y \end{cases}$ → $B(80, 40)$ → B_B= 25000·80 + 40000·40 = 3.600.000 €

C$\begin{cases} x = 90 \\ x + y = 120 \end{cases}$ → $\begin{cases} x = 90 \\ y = 30 \end{cases}$ → $C(90,30)$ → B_C= 25000·90 + 40000·30 = 3.450.000 €

D$\begin{cases} x = 90 \\ y = 10 \end{cases}$ → D(90,10) → B_D= 25000·90 + 40000·10 = 2.650.000 €

Para obtener el máximo beneficio, la empresa debe adquirir 80 utilitarios y 40 deportivos, siendo el beneficio de 3.600.000 €

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones f(x) = $-x^2 + 6x$ y g(x) = $x^2 - 2x$

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre f y g.

D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre f y g.

a) Calculamos el dominio de la funciones:

D(f) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}$ D(g) = $\forall x \epsilon \mathbb{R}$

Monotonía

Calculamos la derivada de la función y lo igualamos a cero.

- f(x) = $-x^2 + 6x$

f´(x) = 0→ f´(x) = $-2x + 6 = 0 \rightarrow \{x = 3$

	(-∞, 3)	(3, ∞)
Signo de f´(x)	+	-
Comportamiento de f(x)	↗	↘

- Crecimiento: $(-\infty, 3)$
- Decrecimiento: (3,∞)
- Mínimo : No hay
- Máximo en x= 3 → (3, 9)

- g(x) = $x^2 - 2x$

g´(x) = 0→ g´(x) = $2x - 2 = 0 \rightarrow \{x = 1$

	(-∞, 1)	(1, ∞)
Signo de f´(x)	-	+
Comportamiento de f(x)	↘	↗

- Crecimiento: (1, ∞)
- Decrecimiento: (-∞, 1)
- Mínimo en x = 1 → (1, -1)
- Máximo: No hay

b) f (x) → $\begin{cases} \text{Mínimo}: \text{ No hay} \\ \text{Máximo en } x = 3 \rightarrow (3,9) \end{cases}$

g (x) → $\begin{cases} \text{Mínimo en } x = 1 \rightarrow (1,-1) \\ \text{Máximo: No hay} \end{cases}$

c) Puntos de corte con los ejes

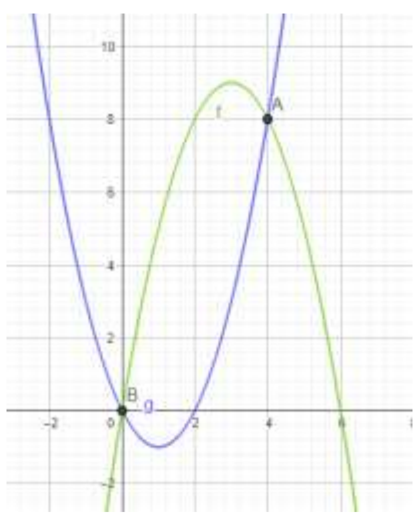
- Función f (x)
  - Con el eje X : f(x) = 0 → $-x^2 + 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow A(0,0) \\ x = 6 \rightarrow B(6,0) \end{cases}$
  - Con el eje Y: x=0 → f(0) = 0 → C (0,0)
- Función g (x)
  - Con el eje X : g(x) = 0 → $x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow D(0,0) \\ x = 2 \rightarrow E(2,0) \end{cases}$
  - Con el eje Y: x=0 → g(0) = 0 → F(0,0)

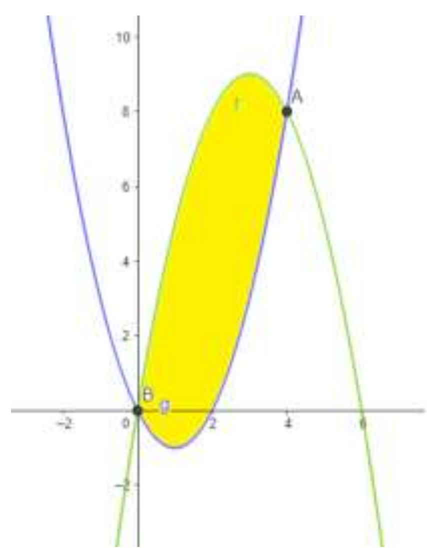
Puntos de Corte de ambas funciones:

Igualamos ambas funciones: f (x) = g(x) → $-x^2 + 6x = x^2 - 2x \rightarrow -2x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

f(0) = $-(0)^2 + 6(0) = 0 \rightarrow B(0,0)$

f(4) = $-(2)^2 + 6(2) = 8 \rightarrow A(4,8)$





D) Calculamos el área

Tendremos un único recinto: [0,4]

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x)dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^4$$

$$A = \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \left(\left(\frac{-2\cdot 4^3}{3} + 4\cdot 4^2\right) - (0)\right) = \left(\frac{-128}{3} + 64\right) - (0) = \frac{64}{3} = 21,\hat{3}u^2$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0, 6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén?¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

t → horas transcurridas desde el momento de la apertura.

P(t) → Peso total de la fruta, expresada en kilogramos.

$P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$

$P'(t) = 60t - 240 = 0 \rightarrow \{t = 4$ Posible Extremo Relativo

El enunciado nos indica que $t \in [0, 6]$

	(0,4)	(4,6)
Signo de P´(t)	-	+
Comportamiento de P(t)	↘	↗

- Tendremos un mínimo en t = 4

En este ejercicio, nos piden que calculemos el momento en el que hay menos fruta en el almacén, es decir que calculemos el mínimo:

$t = 4 \rightarrow P(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 3000 = 2520$ kg

El momento en que en el almacén hay menos kg de fruta es a las 4horas. El número de kg será de 2520 .

B. [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función C(x) = 120x + 700. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función P(x) = x(200 – x). Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo? Se trata de un ejercicio de Optimización.

Sea x→ número de pantalones que debe producir la sastrería familiar para maximizar sus beneficios.

Vamos a calcular la función objetivo:

Beneficio = Ingresos – Costes → B(x) = I(x) – C(x)

Ingresos → I(x) = x· $(200 - x)$

Costes → C(x) = 120x + 700

Función Objetivo → Beneficio → **B(x)** = I(x) – C(x) = x· $(200 - x) -$ (120x + 700) = $\boldsymbol{-x^2 + 80x - 700}$

- Derivamos la función objetivo y lo igualamos a cero:

  B´(x) = - $2x + 80$ → - $2x + 80$= 0 → x=40 pantalones que deben producir.

- Vamos a comprobar que se trata de un máximo:

  B´´(x) = -2 → B´´(40)= -2<0 → por lo tanto tendremos un máximo

- Calculamos el beneficio:

  B(x)= $-x^2 + 80x - 700$ → B(40)= $-(40)^2 + 80 \cdot 40 - 700 = 900$€

Para maximizar el beneficio, deberíamos producir 40 pantalones, ascendiendo el beneficio a 900€

<u>Ejercicio 5</u> [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años, 9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.

a) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo medio de via útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos, donde X ~ N(μ; 3,2).

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\alpha/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 − α.

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 375 individuos
$\boldsymbol{\sigma}$ = 3,2 años
$\bar{x}$ = desconocida

Para una confianza del 95%, α = 0,05

P(Z≤ $Z_{\alpha/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,975 → por lo tanto $Z_{\alpha/2} = Z_{0,025}$= 1,96

IC = (8,2 años; 9,4 años) → Como IC =$(\bar{x} - E; \bar{x} + E)$ tendremos:

$\begin{cases} \bar{x} - E = 8,2 \\ \bar{x} + E = 9,4 \end{cases} \to \begin{cases} \boldsymbol{\bar{x} = 8,8\ años} \\ E = 0,6 \end{cases}$

El error viene definido por: E = $Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ → 0,6 = 1,96$\frac{3,2}{\sqrt{n}}$ → **n = 109,27**

Por lo tanto el tamaño mínimo que debe tener la muestra debe ser de **110 microondas**

B. [1,25 PUNTOS] En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos.
Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

b) Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad, donde X ~ N(μ, 15).

Tenemos una muestra aleatoria:

n = 125 viajeros
$\bar{x} = 16$ min
$\sigma = 2$ min

Para una confianza del 97,5%, Nivel de confianza = 1- α = 0,975 → α = 0,025

P(Z≤ $Z_{\propto/2}$) = 1- $\frac{\alpha}{2}$ = 0,9875 → por lo tanto $Z_{\propto/2} = Z_{0,0125}$= 2,24

Sabemos que el intervalo de confianza viene dado por IC=$\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\right)$, siendo σ la desviación típica poblacional; n, el tamaño muestral, y $Z_{\propto/2}$, el valor correspondiente en la tabla normal para una confianza 1 – α.

Calculamos el intervalo de confianza:

$$IC_{0,975}(\mu) = \left(16 - 2{,}24\frac{2}{\sqrt{125}};\ 16 + 2{,}24\frac{2}{\sqrt{125}}\right) = (15{,}599; 16{,}401)$$

Ejercicio 6 **[2,5 PUNTOS]**

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen, presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto defábrica?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?

D. [0,75 PUNTOS] Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

Se designan por:

B = “ El artículo de iluminación es una bombilla“

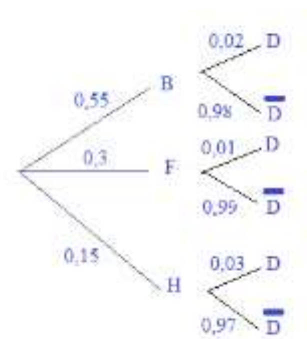
F = “El artículo de iluminación es un fluorescente“

H = “El artículo de iluminación es un halógeno “

D = “ Presenta defecto de fábrica “

$\overline{D}$ = “ No presenta defecto de fábrica “

Diagrama de árbol



a) Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(F \cap \overline{D})$ = P(F)·P($\overline{D}$/F)= $0,3 \cdot 0,99 = 0,297$

b) Se trata de una probabilidad Compuesta: $P(B \cap D)$ = P(B)·P(D/B)= $0,55 \cdot 0,02 = 0,011$

c) Se trata de una probabilidad Total:

P(D)= $P(B \cap D) + P(F \cap D) + P(H \cap D)$ = P(B)·P(D/B)+ P(F)·P(D/F)+ P(H)·P(D/H) =

$0,55 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,01 + 0,15 \cdot 0,03 = 0,0185$

P($\overline{D}$) = 1 – P(D) = 1 – 0,0185 = 0,9815

d) Se trata de una Probabilidad Condicionada

Aplicamos el Teorema de Bayes → $P(H/\overline{D}) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0,15 \cdot 0,97}{0,9815} = 0,1482$