- <u>Asíntotas Verticales</u>

¿Dónde tengo que hacer el estudio de las asíntotas verticales?:

- En las funciones racionales en aquellos valores que me anulan el denominador.
- En las funciones logarítmicas en aquellos valores que anulan lo que está dentro del logaritmo.

Ej) f(x)= $\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ D(f)= $\mathbb{R}$-$\{x = 1\}$ Tenemos que hacer el estudio de la asíntota vertical en x=1que es el punto donde la función posee una discontinuidad.

<u>En x = 1</u>

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{2}{0} \rightarrow \left[\frac{k}{0}\right]$

$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{+}{0^-}$ = -∞ Como el límite tiende a ∞ o a -∞ en x=1 vamos a tener una asíntota vertical.

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{+}{0^+}$ = ∞ Si el límite nos diese un valor finito no habría asíntota en ese punto. Os voy a poner un ejemplo a continuación.

Ej) f(x)= $\frac{x^2-2x+1}{x-1}$ D(f)= $\mathbb{R}$-$\{x = 1\}$ Tenemos que hacer el estudio de la asíntota vertical en x=1que es el punto donde la función posee una discontinuidad.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x-1}$ = 0

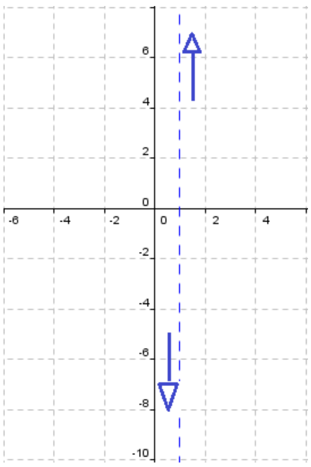
$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+3}{x-1} = 0$ Como el límite tiende a 0 y no a ∞ o -∞ en x=1 no vamos a tener una asíntota vertical.

$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+3}{x-1} = 0$

Para representar esta asíntota vertical :

$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{+}{0^-} = -\infty$ Vemos los límites la laterales y vemos que el límite lateral por la izquierda

$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-2x+3}{x-1} = \frac{+}{0^+} = \infty$ tiende a -∞ en x=1 con lo que dibujamos la flecha hacia abajo, el límite lateral por la derecha tiende a ∞ en x=1 con lo que dibujamos la flecha hacia arriba.



- <u>Asíntotas Horizontales y Oblicuas</u>

El siguiente paso es mirar si tenemos asíntotas horizontales u oblicuas. Si tenemos una de ellas no tendremos la otra, es decir si tenemos asíntota horizontal no tendremos asíntota oblicua y viceversa.

Vamos a mirar nuestra función:

- En las funciones racionales miramos el grado del numerador y del denominador:
    - Si el grado del numerador es igual o menor que el denominador tendremos una asíntota horizontal.
    - Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador tendremos una asíntota oblicua.

Ej) f(x)= $\frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ Vemos que el grado del numerador = grado del denominador = 2 tendremos asíntota horizontal.

Ej) f(x)= $\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ El grado del numerador > grado del denominador tendremos una asíntota oblicua.

Asíntotas Horizontales

Tomamos la función $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-1}$ y calculamos los límites en el ∞ y en el -∞.

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2-1} = 1$ Como los límites tienen como resultado un valor finito la función tendrá una

$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{x^2-1} = 1$ asíntota horizontal en y =1.

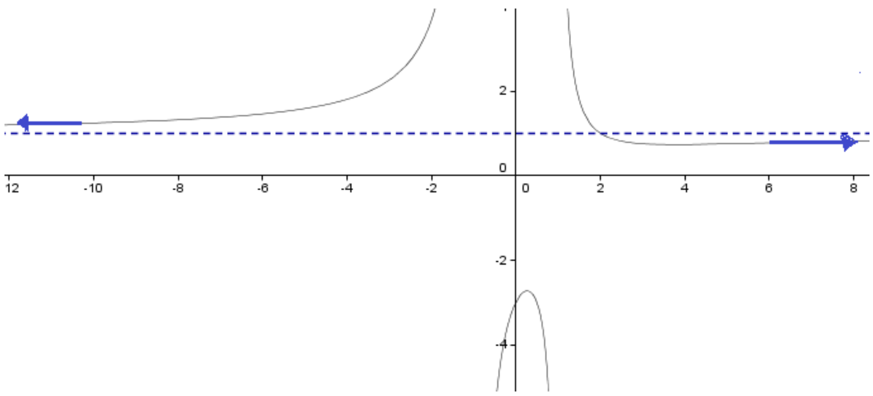
¿Cómo representamos esta asíntota horizontal?

Miramos que el valor de la función para un valor alto de x esté por encima o por debajo de esa asíntota horizontal, haríamos lo mismo para un valor muy pequeño.

Tomamos un valor alto de x por ejemplo x =1000 y lo sustituimos en nuestra función y miramos si este valor es mayor o menor que 1 que es el valor de la asíntota.

f(1000) < 1 → Dibujaremos nuestra función por debajo de esa asíntota.

f(-1000) > 1 →Dibujaremos nuestra función por encima de esa asíntota.



Asíntotas Oblicuas

Tomamos la función $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ y observamos que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador y la diferencia entre sus grados es 1, por lo que tendremos una asíntota oblicua.

La función que define nuestra asíntota vendrá determinada por y = mx+n

m= $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+3}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x^2-x}=1$

n= $\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3}{x-1}-1\cdot x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+3-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+3}{x-1}=-1$

Sustituimos los valores de m y n en nuestra función lineal (y=mx+n) y nos queda:

y= mx +n = 1· $x-1$ → **y= f(x)= x-1**

¿Cómo representamos esta asíntota oblicua?

Miramos que el valor de la función para un valor alto de x esté por encima o por debajo de esa asíntota oblicua, haríamos lo mismo para un valor muy pequeño.

Tomamos un valor alto de x por ejemplo x =1000 y lo sustituimos en nuestra función y miramos si este valor es mayor o menor que f(1000)=1000-1 = 999 (correspondiente al valor de nuestra asíntota).

Cuando x→∞

Cogemos nuestra función $f(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-1}$ y calculamos su valor para una x muy grande simulando el ∞ . Vamos a coger el valor x=1000 y lo sustituimos en la función, f(1000)= $\frac{1000^2-2\cdot 1000+3}{1000-1}=999{,}002$

Ahora hacemos lo mismo pero con nuestra asíntota, sustituimos el valor x= 1000 en nuestra asíntota y= x-1 = 1000-1=999

, f(1000)= $\frac{1000^2-2\cdot 1000+3}{1000-1}=999{,}002$ > f(1000)=1000-1=999 Como el valor de la función es mayor que el valor de la asíntota en ese punto, dibujaremos la función por encima de la asíntota.

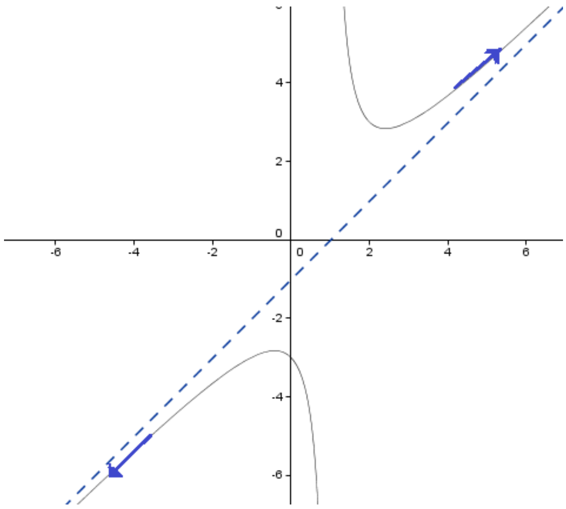
Cuando x$\rightarrow -\infty$

Cogemos nuestra función $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x-1}$ y calculamos su valor para una x muy pequeña simulando el $-\infty$. Vamos a coger el valor x= -1000 y lo sustituimos en la función, f(-1000)= $\frac{(-1000)^2-2\cdot(-1000)+3}{(-1000-1)} = -1001{,}002$

Ahora hacemos lo mismo pero con nuestra asíntota, sustituimos el valor x= -1000 en nuestra asíntota y= x-1 = -1000-1= -1001

Como f(-1000)= $\frac{(-1000)^2-2\cdot(-1000)+3}{(-1000-1)} = -1001{,}002$ < f(-1000)=-1000-1 = -1001

Como el valor de la función es menor que el valor de la asíntota en ese punto, dibujaremos la función por debajo de la asíntota.



Como podemos observar cuando x$\rightarrow\infty$ la función se encuentra por encima de nuestra asíntota.

Cuando x$\rightarrow$ - ∞ la función se encuentra por debajo de nuestra asíntota.